

Ponavljjanje srednjoškolskog gradiva

Sadržaj

1	Potencije	3
1.1	Zadatci	4
2	Kvadratne jednadžbe	9
2.1	Zadatci	10
3	Iracionalne jednadžbe	14
3.1	Zadatci	14
4	Algebarske jednadžbe višeg reda	16
5	Kvadratne nejednadžbe	18
6	Polinomi	25
6.1	Dijeljenje polinoma	26
6.2	Rastavljanje polinoma na faktore	27
7	Funkcija	28
7.1	Realne funkcije realne varijable	29
7.2	Parnost i neparnost	29
8	Eksponencijalne i logaritamske funkcije	32
8.1	Eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$	32
8.2	Zadatci:	34
8.3	Logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x$	36
8.4	Zadatci	39
9	Trigonometrijske funkcije	41
9.1	Trigonometrijska kružnica	44
9.2	Trigonometrijske funkcije	46
9.3	Zadatci	56

10 Transformacije nad grafovima funkcija	60
10.1 Horizontalna translacija	60
10.2 Vertikalna translacija	62
10.3 Skaliranje u smjeru osi y	64
10.4 Skaliranje u smjeru osi x	66
10.5 Zrcaljenje obzirom na os x	68
10.6 Zrcaljenje obzirom na os y	69
10.7 Zadatci	70
11 Apsolutna vrijednost realnog broja	73
11.1 Jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima	74
11.2 Zadatci	74
12 Pravac	76
12.1 Zadatci	77

1 Potencije

Za $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ te $m, n \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Gornja pravila vrijede i za $m, n \in \mathbb{R}$ pod uvjetom da je $a, b \in \mathbb{R}^+$, gdje je $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ za $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^+$

KVADRATI BINOMA, RAZLIKA KVADRATA

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (kvadrat zbroja)
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (kvadrat razlike)
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (razlika kvadrata)

KUB BINOMA, RAZLIKA I ZBROJ KUBOVA

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (kub zbroja)
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (kub razlike)
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ (razlika kubova)
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (zbroj kubova)

1.1 Zadaci

1. Izračunajte:

(a) $(a^3)^{6n} + (a^{9n})^2 - (a^{6n})^3$

(b) $(2^{n+1} + 2^m)^2$.

2. Skratite razlomak $\frac{a^3 + b^3}{a^4 - b^4}$.

3. Skratite razlomak $\frac{a^3 - 1}{a^4 + a^2 + 1}$.

4. Pojednostavite sljedeće izraze:

(a) $\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 1}$.

(b) $\frac{2xy + 2y^2}{12x - 6y} : \frac{4x^2 - 4y^2}{16x^2 - 4y^2}$.

(c) $\frac{42x^3y^2z^2}{35a^2bc} \cdot \frac{25abc}{21xyz}$.

(d) $\left(\left(\frac{a}{b} - 1\right)^2 + \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{a+b}{b}.$

5. Izračunajte $\frac{9x}{x^3 - 27} + \frac{x - 3}{x^2 + 3x + 9} - \frac{1}{x - 3}.$

6. Izračunajte $\frac{25x^2 - 30xy + 9y^2}{9x^2 + 12xy + 4y^2} : \frac{25x^2 - 9y^2}{9x^2 - 4y^2}.$

7. Izračunajte $\frac{x^3 - 1}{x^3 + 8} : \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 4}.$

8. Izračunajte $\frac{2a}{x^2 - 4x + 4} + \frac{4a}{x^2 - 4} + \frac{a}{x + 2}.$

9. Skratite razlomak $\frac{b^{2x+y} + b^{x+2y} + b^{x+y+2}}{b^{2x-y} + b^x + b^{x-y+2}}$.

10. Izračunajte $[(\frac{1}{x^2} - 1)^{-1} : (\frac{1-x}{x})^{-2}]^{-2}$.

11. Izračunajte:

(a) $\sqrt[4]{16a^{-12}b^{-8}}$

(b) $\sqrt[5]{-32a^5b^{10}}$.

12. Racionalizirajte nazivnik $\frac{5\sqrt{3} + 2\sqrt{7}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{7}}$.

13. Izračunajte $\left(\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}} - \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}}\right)^2$.

14. Izračunajte $\sqrt[4]{a^2b^3x^3} : \sqrt[6]{a^3b^2x^4}$.

15. Izračunajte $\sqrt{z} : \sqrt[3]{z^2} \cdot \sqrt[6]{z^5}$.

16. Izračunajte

(a) $(x - y) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$

(b) $(a + b) : (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$.

2 Kvadratne jednadžbe

Jednadžba oblika

$$ax^2 + bx + c = 0$$

naziva se kvadratna jednadžba. Brojevi $a, b, c \in \mathbb{R}$ zovu se koeficijenti jednadžbe, pri čemu je a vodeći koeficijent, $a \neq 0$, dok je c slobodni član.

Rješenja kvadratne jednadžbe su dana s

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Realni broj $D = b^2 - 4ac$ naziva se diskriminanta. U ovisnosti o vrijednosti diskriminante tri su moguća tipa rješenja kvadratne jednadžbe:

1. $D > 0$ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ (dva različita realna rješenja)
2. $D = 0$ $x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$ (dvostruko realno rješenje)
3. $D < 0$ $x_1 = u + vi, \quad x_2 = u - vi, \quad a, b \in \mathbb{R}$ (par konjugirano kompleksnih rješenja).

Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C} = \{z \mid z = u + vi, \quad u, v \in \mathbb{R}\}, \quad i = \sqrt{-1}.$

VIÈTEOVE FORMULE

Za rješenja kvadratne jednadžbe vrijedi

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

2.1 Zadaci

1. Riješite u skupu $\mathbb{C}$ sljedeće jednačbe:

(a) $4x^2 - 25 = 0$

(b) $x^2 + 5x = 0$

(c) $9x^2 - 12x - 23 = 0$

(d) $2x^2 - 2x + 5 = 0$

(e) $\frac{4}{x+2} = x - 2.$

(f) $\frac{x+1}{2x+6} - \frac{2x}{3-x} = \frac{9(x+5)}{2x^2-18}.$

2. Ne rješavajući jednadžbu $3x^2 - x - 4 = 0$ odredite vrijednost sljedećih izraza (x_1 i x_2 su rješenja te jednadžbe):

(a) $x_1 + x_2$

(b) $x_1 \cdot x_2$

(c) $x_1^2 + x_2^2$

(d) $x_1^3 + x_2^3.$

3. Riješite jednadžbu $x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 17.$

4. Riješite sustav jednađbi

$$\begin{aligned}x^2 + 4y^2 &= 20 \\ 3x^2 - y^2 &= 47.\end{aligned}$$

5. Riješite sustav jednađbi

$$\begin{aligned}xy &= 16 \\ x - 3\sqrt{xy} - 2y &= 2.\end{aligned}$$

6. Riješite sustav jednažbi

$$x + xy^2 = 4$$

$$x^2y^2 = 4.$$

3 Iracionalne jednačbe

3.1 Zadaci

1. Riješite jednačbu $\sqrt{4-3x} : \sqrt{5x+9} = 2 : 3$.

2. Riješite jednačbu $2 + \sqrt{x-16} = \sqrt{x}$

3. Riješite jednačbu $2x + \sqrt{4x^2 - 5x + 3} = 7$.

4. Riješite sustav jednažbi

$$xy = 16$$

$$x - 3\sqrt{xy} - 2y = 2.$$

4 Algebarske jednadžbe višeg reda

Zadatak. Riješite jednadžbe:

1. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0.$

2. $x^3 + 21x^2 + 21x + 1 = 0.$

3. $27x^3 + 105x^2 - 175x - 125 = 0$.

4. $x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32 = 0$.

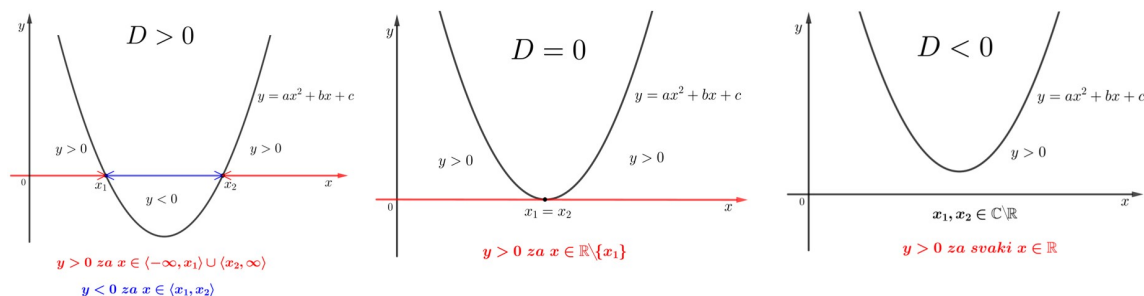
5 Kvadratne nejednadžbe

Polinom $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ drugog stupnja zove se **kvadratna funkcija**.

Graf ovog polinoma je parabola s tjemenom $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

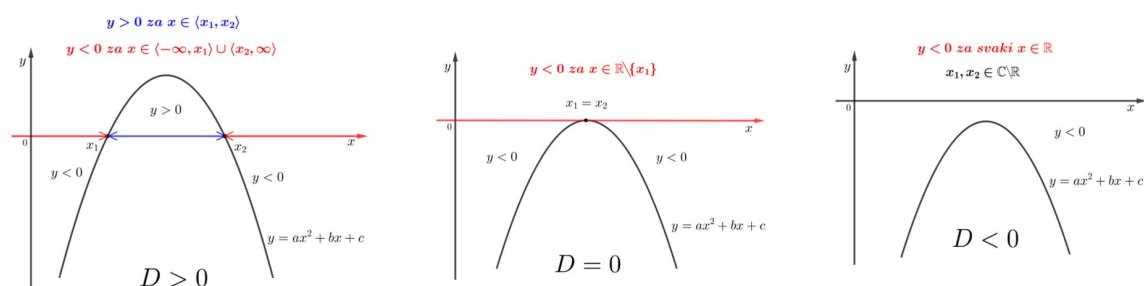
Rješenja jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ su $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, gdje je $D = b^2 - 4ac$ diskriminanta.

Ako je $a > 0$, onda parabola ima otvor prema gore.



Slika 1: $y = ax^2 + bx + c$, za $a > 0$

Ako je $a < 0$, onda parabola ima otvor prema dolje.



Slika 2: $y = ax^2 + bx + c$, za $a < 0$

Zadatci:

1. Riješite kvadratne nejednadžbe:

a) $x^2 - 5x + 4 < 0$

b) $-x^2 - 2x + 3 \leq 0$

c) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$

d) $-x(x - 1) \geq 1.$

2. Riješite nejednadžbu $\frac{x-1}{4-2x} \geq 0$.

3. Riješite nejednadžbu $\frac{x-2}{(x-1)(x+3)} \leq 0$.

4. Riješite nejednadžbu $\frac{2x - 1}{2x - x^2} < 0$.

5. Riješite nejednadžbu $\frac{4x - x^2}{x^2 - x - 2} \leq 0$.

6. Riješite nejednadžbu $\frac{x-5}{-x^2+3x-5} \leq 0$.

7. Riješite sustav nejednadžbi $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-2x > 0. \end{cases}$

8. Riješite sustav nejednadžbi $\begin{cases} 4x - x^2 > 0 \\ 2x^2 - 7x + 3 > 0. \end{cases}$

9. Riješite nejednadžbu $\frac{2x}{x-1} \geq 2$.

10. Riješite nejednadžbu $2x - 1 < \frac{1}{x}$.

11. Nađite skup rješenje nejednadžbe $(x + 1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$.

6 Polinomi

Funkciju $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oblika

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

gdje je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, te $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, nazivamo **polinomom**. Brojeve $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazivamo koeficijentima polinoma p , a_n je vodeći koeficijent i a_0 slobodni član.

Ako je $a_n \neq 0$, tada je p polinom n -tog stupnja. Polinom n -tog stupnja ima točno n kompleksnih nultočaka brojeći njihove kratnosti. Pritom kompleksne nultočke dolaze kao parovi konjugirano kompleksnih brojeva, tj. ako je $a + bi$ nultočka, onda je $a - bi$ također nultočka, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Ako je c nultočka od p , onda je polinom p djeljiv polinomom $g(x) = x - c$ tj.

$$p(x) = (x - c) \cdot h(x)$$

gdje je stupanj polinoma h jednak $n - 1$.

Zadatci. Odredite stupanj i nultočke sljedećih polinoma.

1. $p(x) = 7(x - 3)^2(x + 5)$

2. $p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

3. $p(x) = x^5 - 4x^3 + 8x^2 - 32$

6.1 Dijeljenje polinoma

Zadatci:

1. Nađite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^5 + x^2$ polinomom $g(x) = x^3 + x + 1$.

2. Nađite količnik pri dijeljenju polinoma $f(x) = 2x^6 - 7x^5 - 9x^4 - 4x$ polinomom $g(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 1$.

6.2 Rastavljanje polinoma na faktore

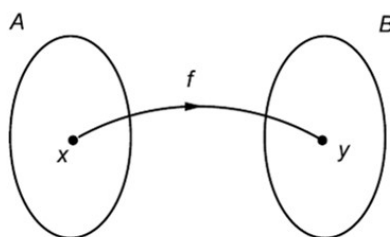
Ako polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ s cjelobrojnim koeficijentima ima cjelobrojnu nultočku c , tada je c djeliteľ slobodnog člana a_0 .

Zadatak: Rastavite polinom $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ na realne faktore.

7 Funkcija

Neka su A i B neprazni skupovi. **Funkcija** f sa skupa A u skup B je pravilo po kojem se svakom skupu $x \in A$ pridružuje točno jedan element skupa $y \in B$.

Ako je f funkcija sa skupa A u B , pišemo $f: A \rightarrow B$.



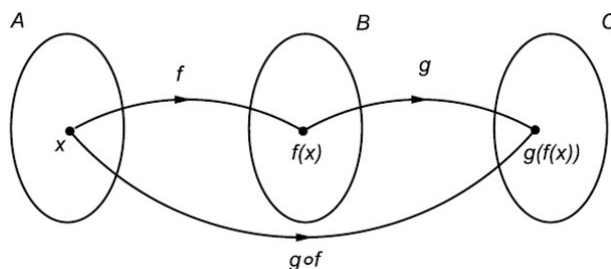
Slika 3: $f: A \rightarrow B$

Element x nazivamo argument, a $y = f(x)$ slika elementa x .

Skup A zove se **područje definicije** ili domena preslikavanja f , a skup B **područje vrijednosti** ili kodomena preslikavanja f . Za domenu funkcije f koristimo oznaku $\mathcal{D}(f)$.

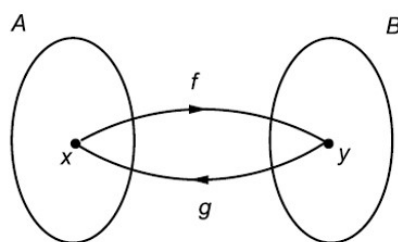
Skup $Im(f) = \{f(x) : x \in A\}$ zovemo slikom funkcije f .

Neka su A , B i C neprazni skupovi, te neka su dane funkcije $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$. **Kompozicija funkcija** f i g je funkcija $g \circ f: A \rightarrow C$ definirana s $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ za sve $x \in A$.



Slika 4: Kompozicija funkcija f i g

Neka su A i B neprazni skupovi, te $f: A \rightarrow B$ dana funkcija. Kažemo da je $g: B \rightarrow A$ **inverzna funkcija** od f ako je $(g \circ f)(x) = x$ za sve $x \in A$ i $(f \circ g)(y) = y$ za sve $y \in B$. Inverznu funkciju funkcije f označavamo s f^{-1} .



Slika 5: $g = f^{-1}$ je inverzna funkcija od f , $f^{-1}: B \rightarrow A$

7.1 Realne funkcije realne varijable

Funkciju f čija domena i kodomena su podskupovi skupa realnih brojeva zovemo **realnom funkcijom realne varijable**.

Obično pišemo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, iako domena funkcije f ne mora biti cijeli skup $\mathbb{R}$, nego skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje je $f(x)$ dobro definiran.

Npr., ako je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana $f(x) = \frac{1}{x}$, tada je prirodna domena funkcije f skup $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7.2 Parnost i neparnost

Funkcija f je **parna** ako iz $x \in \mathcal{D}(f)$ slijedi $-x \in \mathcal{D}(f)$, te vrijedi $f(-x) = f(x)$ za sve $x \in \mathcal{D}(f)$.

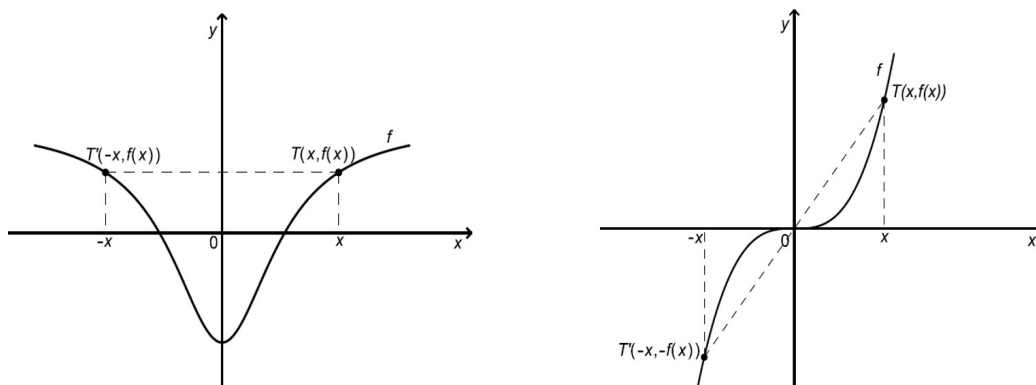
Graf parne funkcije je simetričan s obzirom na os y , (slika 6, lijevo).

Funkcija f je **neparna** ako iz $x \in \mathcal{D}(f)$ slijedi $-x \in \mathcal{D}(f)$, te vrijedi $f(-x) = -f(x)$ za sve $x \in \mathcal{D}(f)$.

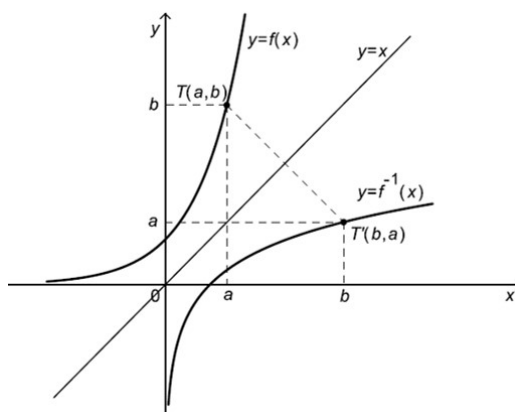
Graf neparne funkcije je centralno simetričan s obzirom na ishodište (slika 6, desno).

Neka je f^{-1} inverzna funkciji f . Graf od f^{-1} je simetričan grafu od f s obzirom na pravac $y = x$ (slika 7).

Točka $c \in \mathcal{D}(f)$ je **nultočka** od f ako je $f(c) = 0$.



Slika 6: Graf parne funkcije (lijevo) i neparne (desno)



Slika 7: Grafovi funkcija f i f^{-1}

Zadatci:

1. Ako je $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = x + 3$ nađite $f \circ g$, $g \circ f$.

2. Ako je $g(x) = 1 - x^2$ i $(f \circ g)(x) = \frac{1 - x^2}{x^2} (x \neq 0)$, nađite $f(\frac{1}{2})$.

3. Odredite koje su od danih funkcija parne, koje neparne, a koje nisu niti parne niti neparne.

(a) $f(x) = \frac{a^{2x} - 1}{a^x}$

(b) $f(x) = \frac{x - 1}{|x - 1|}$

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{x + 3}{x - 3}\right)$

(d) $f(x) = \sin(\cos x)$

8 Eksponencijalne i logaritamske funkcije

8.1 Eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$

Ukoliko se varijabla funkcije javlja se u eksponentu, primjerice $f(t) = 3^t$ ili $g(s) = 7^s$, $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, govorimo o eksponencijalnoj funkciji. Pritom zahtijevamo da je baza pozitivna kako bismo izbjegli imaginarne brojeve poput $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$.

Eksponencijalna funkcija je svaka funkcija oblika

$$f(x) = a^x, \quad (a > 0, \quad a \neq 1).$$

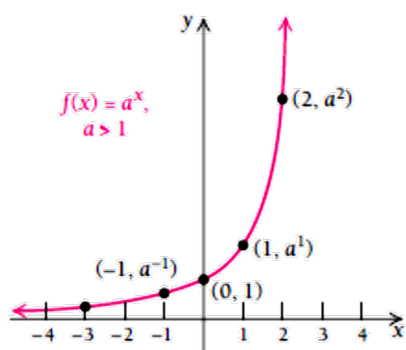
definirana za svaki realni broj x . Konstantu a nazivamo bazom funkcije.

- Područje definicije eksponencijalne funkcije je cijeli skup $\mathbb{R}$.
- Skup vrijednosti eksponencijalne funkcije je skup pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$.
- Eksponencijalna funkcija nema nultočki.

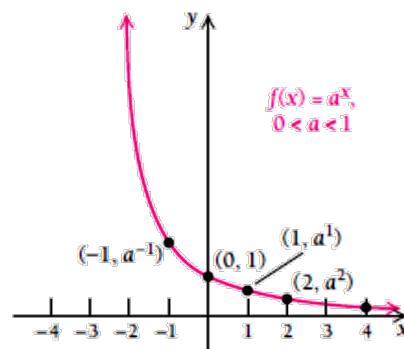
Graf eksponencijalne funkcije

Ovisno o vrijednosti baze razlikujemo dva slučaja:

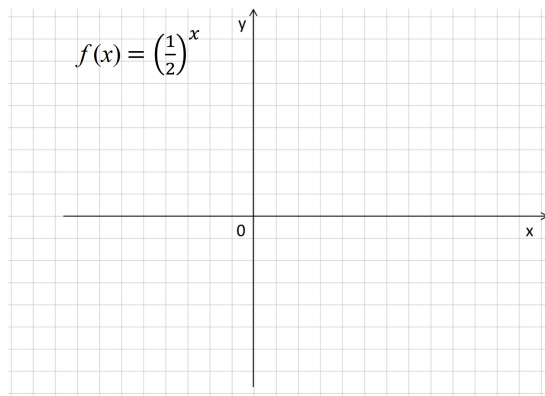
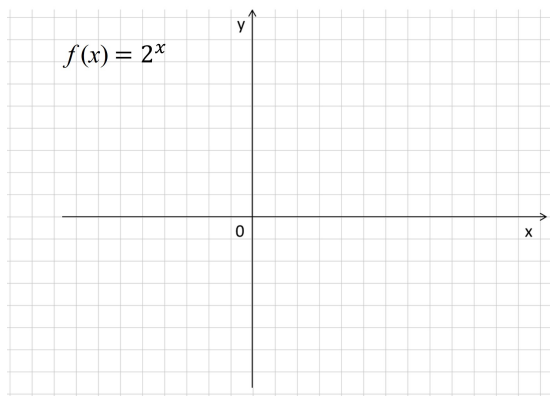
I. $a > 1$



II. $0 < a < 1$



Primjer. Nacrtajte grafove sljedećih funkcija:



Osnovna svojstva eksponencijalne funkcije i njezinog grafa

1. Funkcija $y = a^x$ raste za $a > 1$ i pada za $0 < a < 1$.
2. Graf funkcije $y = a^x$ siječe os y u točki $(0, 1)$.
3. Za $f(x) = a^x$ vrijedi

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \quad \text{Im}(f) = (0, +\infty), \quad \mathcal{N}(f) = \emptyset.$$

4. Funkcija $f(x) = a^x$ je bijekcija.
5. *Svojstvo injektivnosti eksponencijalne funkcije.*
Funkcija $f(x) = a^x$ je injektivna, tj. iz $a^{x_1} = a^{x_2}$ slijedi $x_1 = x_2$.

Matematička konstanta e Uz broj π u brojnim prirodnim zakonima ističe se u matematici još jedan iracionalan i transcendentan broj, broj e . Matematička konstanta e nazvana još i Eulerov broj ili Napierova konstanta je baza prirodnog logaritma i njegova približna vrijednost iznosi

$$e = 2,7182818284590\dots$$

Oznaku e uveo je švicarski matematičar Leonhard Euler 1727. godine. Funkcija oblika $f(x) = e^x$ naziva se *eksponencijalna funkcija uz bazu e* .

8.2 Zadaci:

Riješite sljedeće jednačbe:

1. $0,1^x = 100$

2. $0,2^{2x-3} = 5$

3. $4^{3x+2} = 64 \cdot 2^{2x-4}$

4. $3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$

5. $3^x + 3^{x+1} = 2^{x+2}$

6. $2^x \cdot 8^{\frac{1}{x}} - 16 = 0$

7. $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x.$

8.3 Logaritamska funkcija $f(x) = \log_a x$

Logaritamska funkcija s realnom bazom a je funkcija oblika

$$f(x) = \log_a x, \quad (a > 0, \quad a \neq 1).$$

Konstantu a nazivamo bazom funkcije.

- Područje definicije, domena logaritamske funkcije je skup pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$.
- Skup vrijednosti, slika logaritamske funkcije je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.
- Logaritamske funkcije imaju nultočku za $x_0 = 1$ i to je točka $(1, 0)$.
- Logaritamska funkcija s bazom a i eksponencijalna funkcija s istom bazom a međusobno su inverzne funkcije. Naime, za $a > 0$ i $a \neq 1$ vrijedi,

$$\begin{array}{ccc} \text{logaritamski oblik} & & \text{eksponencijalni oblik} \\ y = \log_a x & \Longleftrightarrow & x = a^y. \end{array}$$

Brojna svojstva logaritamske funkcije direktna su posljedica veza funkcije i njezinog inverza. Primjerice, ako je $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, onda je inverzna funkcija $f^{-1}(x) = \log_a x$ i vrijedi:

- $((f \circ f^{-1})(x) = x, x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (f(f^{-1}(x)) = x) \Leftrightarrow (f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x)$
- $((f^{-1} \circ f)(x) = x, x \in (0, +\infty)) \Leftrightarrow (f^{-1}(f(x)) = x) \Leftrightarrow (f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x)$

Svojstva logaritamske funkcije Ako je $a > 0$ i $a \neq 1$, onda vrijedi:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1 \\ & \log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x, \quad x > 0 \end{aligned}$$

2. Ako su pritom $M, N > 0$, onda vrijedi:

- a) $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$
- b) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- c) $\log_a M^p = p \cdot \log_a M$
- d) $\log_{a^p} M = \frac{1}{p} \log_a M$
- e) $(\log_a M = \log_a N) \Longleftrightarrow (M = N)$

3. Promjena baze logaritamske funkcije

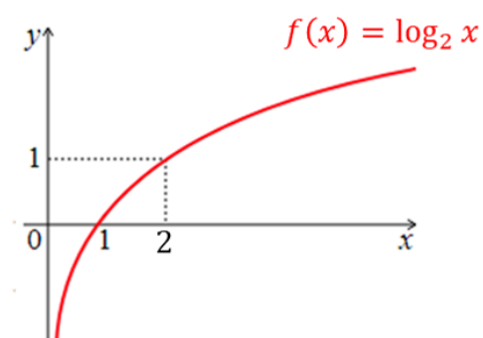
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad b > 0, b \neq 1 \text{ specijalno } \log_a x = \frac{1}{\log_x a}.$$

Graf logaritamske funkcije

Ovisno o vrijednosti baze logaritma razlikujemo dva slučaja:

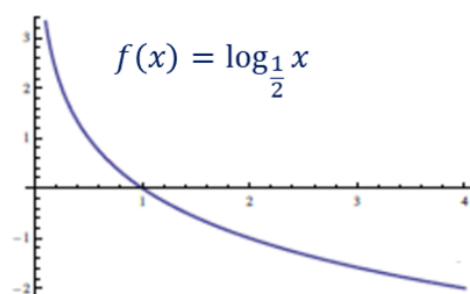
I.

$$a > 1$$

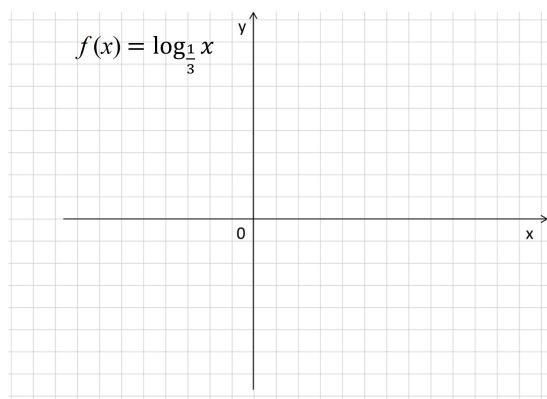
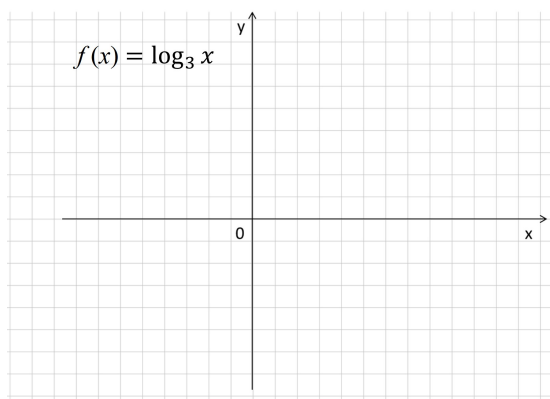


II.

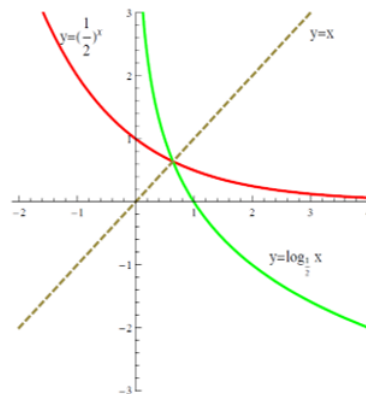
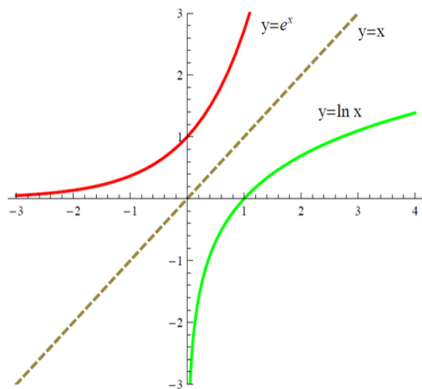
$$0 < a < 1$$



Primjer. Nacrtajte grafove sljedećih funkcija:



Grafovi funkcija a^x i $\log_a x$ simetrični su obzirom na pravac $y = x$.



Osnovna svojstva grafa logaritamske funkcije

1. Funkcija $y = \log_a x$ raste za $a > 1$ i pada za $0 < a < 1$.
2. Graf funkcije $y = \log_a x$ siječe os x u točki $(1, 0)$.
3. Funkcija $f(x) = \log_a x$ je bijekcija.
4. *Svojstvo injektivnosti logaritamske funkcije.*
Funkcija $y = \log_a x$ je injektivna, tj. iz $(\log_a x_1 = \log_a x_2) \implies (x_1 = x_2)$.
5. Dakle, za $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ i $a \neq 1$, vrijedi

$$\mathcal{D}(f) = (0, +\infty), \quad \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Dekadski i prirodni logaritam

- Ako je baza logaritma $a = e$ uvodimo oznaku $\ln x = \log_e x$. Ovu funkciju nazivamo *prirodni logaritam*.
- Ako je baza logaritma $a = 10$ skraćeno zapisujemo $\log x = \log_{10} x$. Ovu funkciju nazivamo *dekadski logaritam*.

8.4 Zadaci

1. Izračunajte:

(a) $100^{\log 7}$

(b) $(\sqrt{10})^{3-2\log 2}$.

2. Izračunajte:

(a) $\log_3 \frac{1}{9}$

(b) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{4}$.

3. Izračunajte $\frac{2\log 2 + \log 7}{1 + \log 2.8}$.

4. Izračunajte $2\log_5 \sqrt{5} + 3\log_2 8$.

Logaritamske jednađbe Riješite sljedeće jednađbe:

5. (a) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$

(b) $\log_5 x = \log_5 20 - \frac{1}{2} \log_5 16$

(c) $\log_3 \left(\log_2 (3x^2 - x) \right) = 0$

(d) $4^{\log_2 (x+2)} = 4x + 5.$

9 Trigonometrijske funkcije

Mjera kuta

Mjeru kuta izražavamo u stupnjevima ili radijanima. Svakom kutu α pridružujemo glavnu mjeru kuta α' iz skupa $0 \leq \alpha' < 360^\circ$ tako da vrijedi

$$\alpha = \alpha' + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Stupanj

Ako se početna i krajnja zraka kuta podudaraju, zatvaraju kut od 0° , odnosno 360° .

$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{ cijelog kuta}$$

Radijan

Radijanska mjera¹ kuta određuje se kao omjer duljine luka l sa središte u vrhu kuta i polumjera r te kružnice.

$$\alpha \text{ rad} = \frac{l}{r} = \frac{\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot 2r\pi}{r} = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi$$

Pretvorba kuta α iz stupnjeva u radijane: $\alpha \text{ rad} = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$

Pretvorba kuta α iz radijana u stupnjeve: $\alpha^\circ = \frac{\alpha \text{ rad}}{\pi} \cdot 180^\circ$

Primjer.

1. Kutove dane u stupnjevima zapišite u radijanima:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } 150^\circ = \underline{\hspace{2cm}} & - 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{ii) } 270^\circ = \underline{\hspace{2cm}} & - 300^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

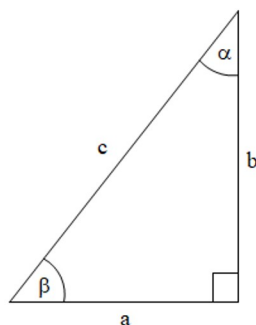
2. Kutove dane u radijanima zapišite u stupnjevima:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \frac{\pi}{3} = \underline{\hspace{2cm}} & - \frac{3\pi}{4} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{ii) } \frac{\pi}{2} = \underline{\hspace{2cm}} & - \frac{5\pi}{3} = \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

¹Radijanska mjera je brojčana vrijednost, neovisna o jediničnoj mjeri.

Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta

Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta definiramo kao omjer stranica pravokutnog trokuta.



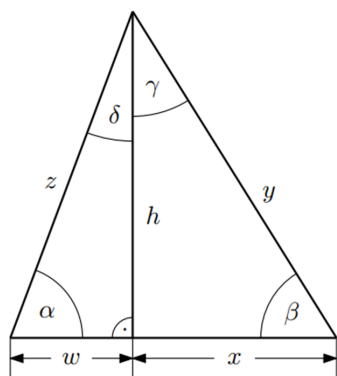
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{nasuprotna kateta}}$$

Primjer. U praznine unesite odgovarajuće duljine stranica.

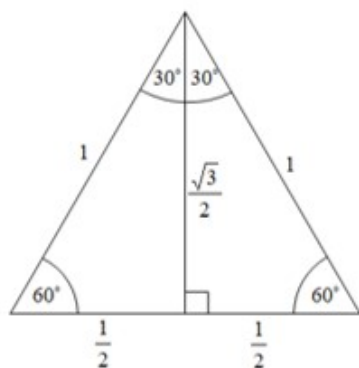


$$\sin \alpha = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad \sin \beta = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad \sin \gamma = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad \sin \delta = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad \cos \beta = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad \cos \gamma = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad \cos \delta = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

Primjer. Odredite tražene kutove:



$$\sin 60^\circ =$$

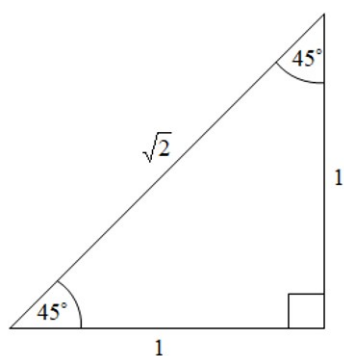
$$\cos 60^\circ =$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ =$$

$$\sin 30^\circ =$$

$$\cos 30^\circ =$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ =$$



$$\sin 45^\circ =$$

$$\cos 45^\circ =$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ =$$

Tablica vrijednosti trigonometrijskih funkcija.

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞

Osnovne trigonometrijske formule

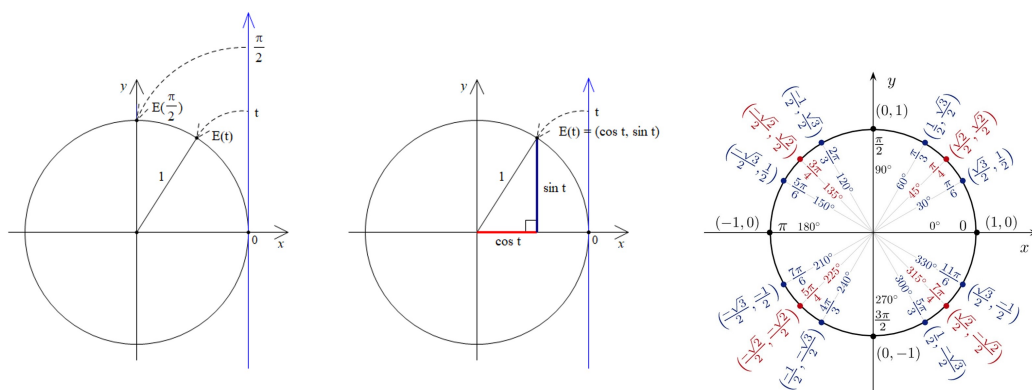
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, & \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

9.1 Trigonometrijska kružnica

Preslikavanje koje realne brojeve $t \in \mathbb{R}$, pridružuje točkama jedinične kružnice $E(t) \in \mathbb{R}^2$ nazivamo eksponencijalno preslikavanje $t \rightarrow E(t)$. **Brojeva kružnica** je jedinična kružnica čijim točkama eksponencijalnim preslikavanjem pridružujemo realne brojeve. Neka je t po volji realan broj, a $E(t)$ njemu odgovarajuća točka na brojevnoj kružnici. Tada je $E(t) = (\cos t, \sin t)$. Vrijednost funkcije **kosinus** jest apscisa, a vrijednost funkcije **sinus** jest ordinata točke $E(t)$.



Slika 8: Brojeva kružnica

Primjer.

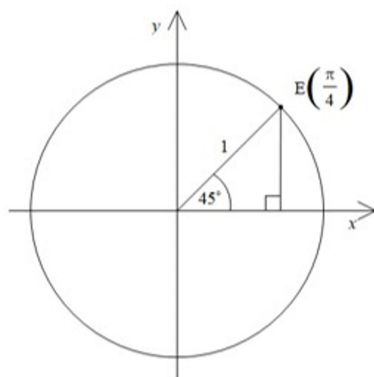
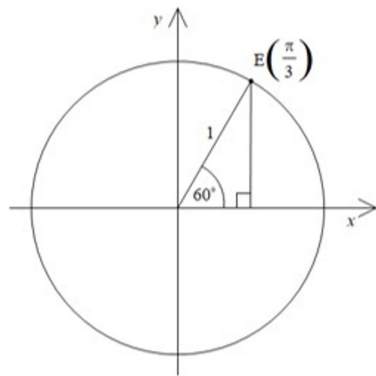
- Služeći se Slikom 8, zapiši koordinate točaka kojima odgovaraju dani kutovi na jediničnoj kružnici:

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{7\pi}{6} & \quad \underline{\hspace{2cm}} & -\frac{\pi}{3} & \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ \text{ii) } 420^\circ & \quad \underline{\hspace{2cm}} & -\frac{3\pi}{4} & \quad \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

2. Služeći se Slikom 8 odredite kojim kutovima (i kojim kvadrantima) pripadaju točke dane sljedećim koordinatama:

- i) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ _____ $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ _____
 ii) $(1, 0)$ _____ $(0, -1)$ _____

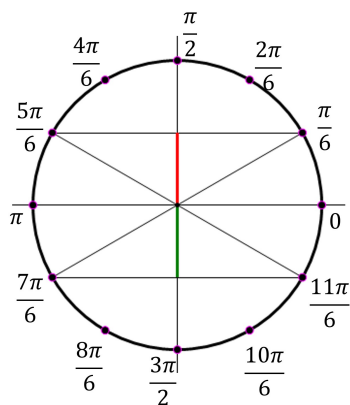
Primjer. Pomoću brojevnice kružnice odredite koordinate točke $E(\frac{\pi}{3})$ i $E(\frac{\pi}{4})$, te $\cos \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{4}$ i $\sin \frac{\pi}{4}$.



9.2 Trigonometrijske funkcije

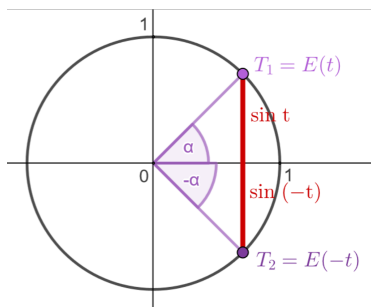
Funkcija sinus

Zadatak. Uz pomoć brojevne kružnice odredite tražene vrijednosti sinusa.

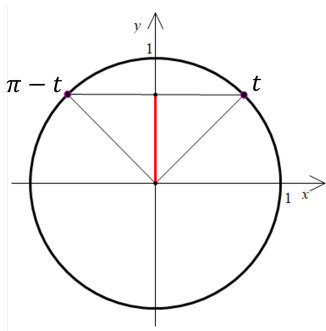


$$\begin{aligned}\sin \frac{\pi}{6} &= \\ \sin \frac{5\pi}{6} &= \\ \sin \frac{7\pi}{6} &= \\ \sin \frac{11\pi}{6} &= \end{aligned}$$

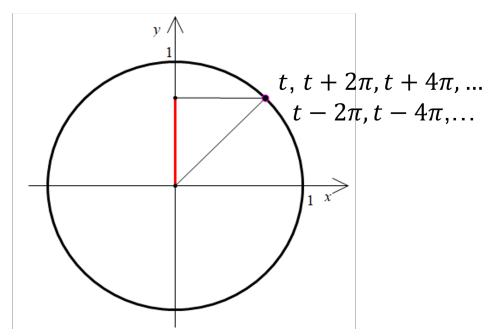
Svojstva funkcije sinus:



$$\sin(-t) = -\sin(t)$$



$$\sin(\pi - t) = \sin t$$



$$\sin t = \sin(t + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Funkcija sinus je neparna funkcija, tj. vrijedi $\sin(-x) = -\sin x$.

Funkcija sinus je periodična funkcija s temeljnim periodom 2π , tj.

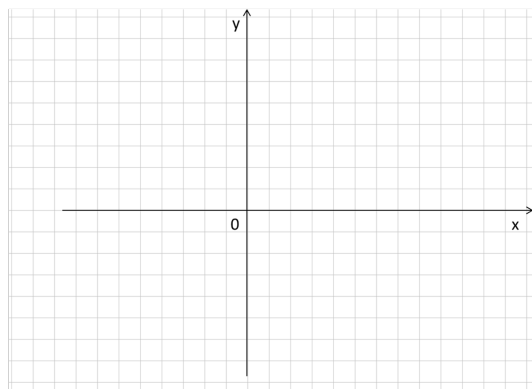
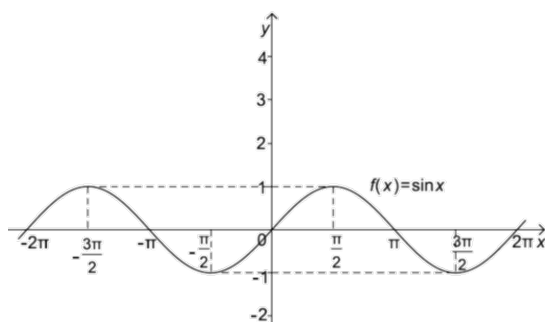
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zadatak. Riješite sljedeće jednačbe:

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

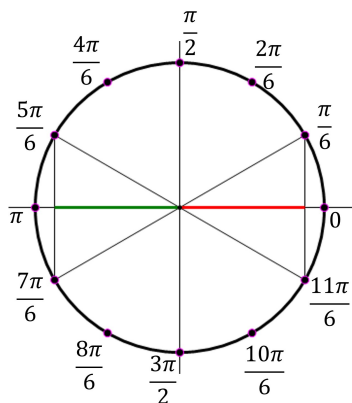
Graf funkcije sinus:



- Područje definicije funkcije sinus je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}$.
- Skup vrijednosti funkcije sinus je interval $[-1, 1]$, $Im_{\sin} = [-1, 1]$.
- Nultočke su: $N_{\sin} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

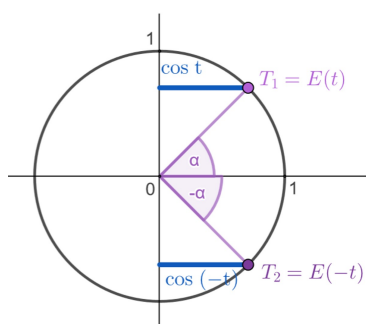
Funkcija kosinus

Zadatak. Uz pomoć brojevne kružnice odredite tražene vrijednosti kosinusa.

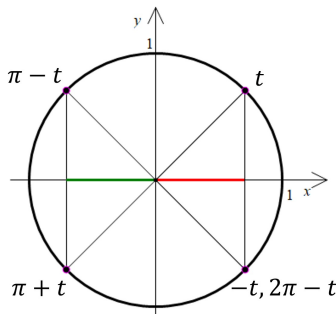


$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{6} &= \\ \cos \frac{5\pi}{6} &= \\ \cos \frac{7\pi}{6} &= \\ \cos \frac{11\pi}{6} &= \end{aligned}$$

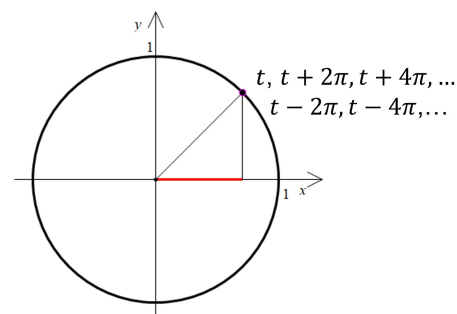
Svojstva funkcije kosinus:



$$\cos t = \cos(-t)$$



$$\cos t = -\cos(\pi - t)$$



$$\cos t = \cos(t + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Funkcija kosinus je parna funkcija, tj. vrijedi $\cos(-x) = \cos x$.

Funkcija kosinus je periodična funkcija s temeljnim periodom 2π , tj.

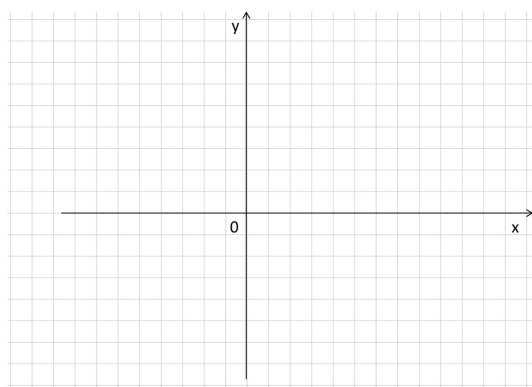
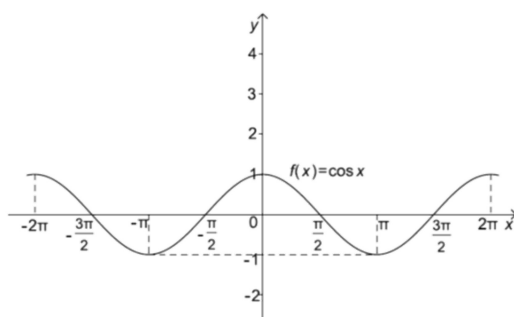
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zadatak. Riješite sljedeće jednačbe:

$$1) \cos x = \frac{1}{2}$$

$$2) \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Graf funkcije kosinus:



- Područje definicije funkcije kosinus je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_{\cos} = \mathbb{R}$.
- Skup vrijednosti funkcije kosinus je interval $[-1, 1]$, $Im_{\cos} = [-1, 1]$.
- Nultočke su: $N_{\cos} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Zadatak. Koristeći svojstva funkcije kosinus i sinus popunite tablicu:

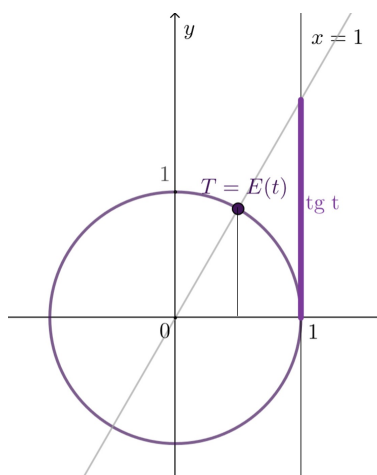
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0				
t	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin t$									
$\cos t$									

Rješenje zadatka:

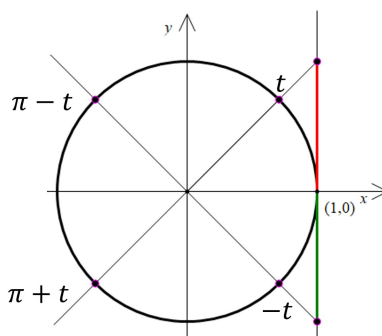
t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
t	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin t$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Funkcija tangens

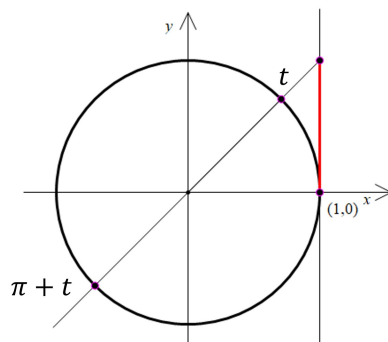
Svojstva funkcije tangens:



$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$



$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$$



$$\operatorname{tg} t = \operatorname{tg}(t + k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

Vrijedi:

- $\operatorname{tg} 0 = 0, \operatorname{tg} \pi = 0, \operatorname{tg} k\pi = 0, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}, \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}, \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ nije definirano

Funkcija tangens je neparna funkcija, tj. vrijedi $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

Funkcija tangens je periodična funkcija s temeljnim periodom π , tj.

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

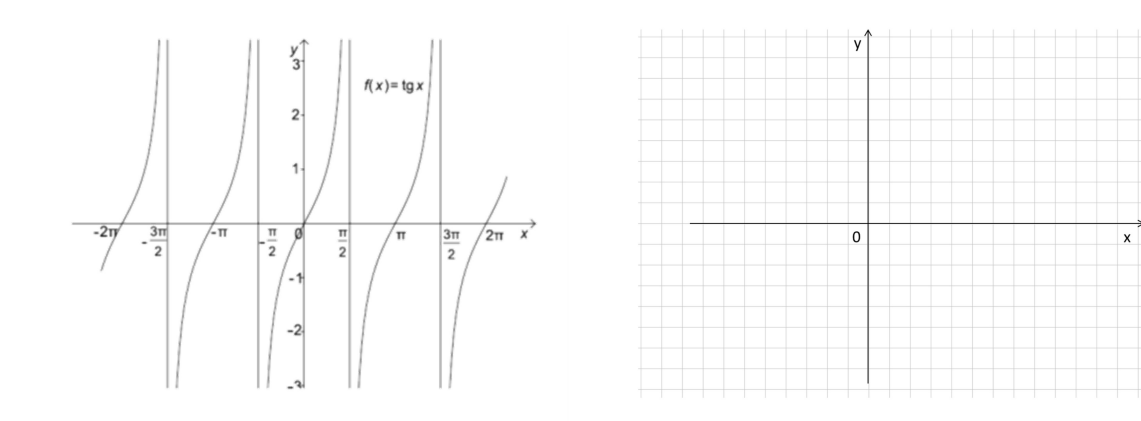
Zadatak. Riješite sljedeće jednačbe:

1) $\operatorname{tg} x = 0$

2) $\operatorname{tg} x = 1$

3) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Graf funkcije tangens:



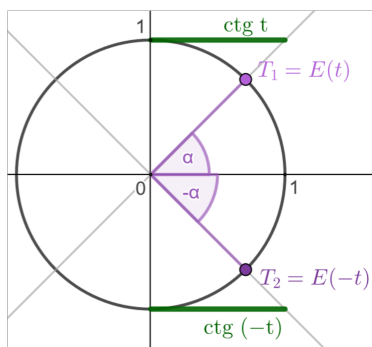
- Skup vrijednosti funkcije tangens je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{D}_{\operatorname{tg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

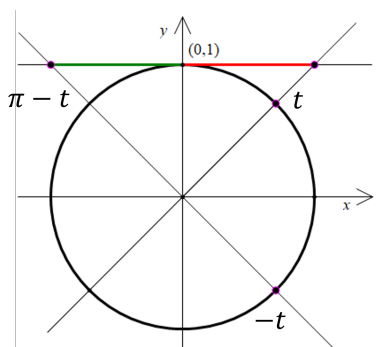
- Skup vrijednosti funkcije tangens je skup realnih brojeva, $\operatorname{Im}_{\operatorname{tg}} = \mathbb{R}$
- Nultočke su: $N_{\operatorname{tg}} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Funkcija kotangens

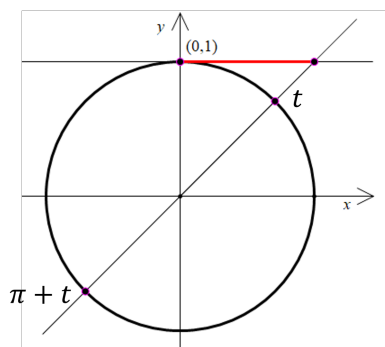
Svojstva funkcije kotangens:



$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}$$



$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$$



$$\operatorname{ctg} t = \operatorname{ctg}(t + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vrijedi:

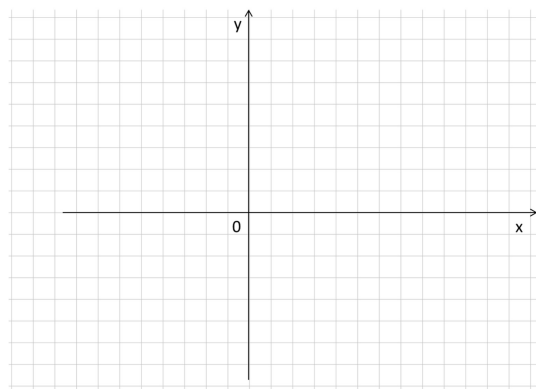
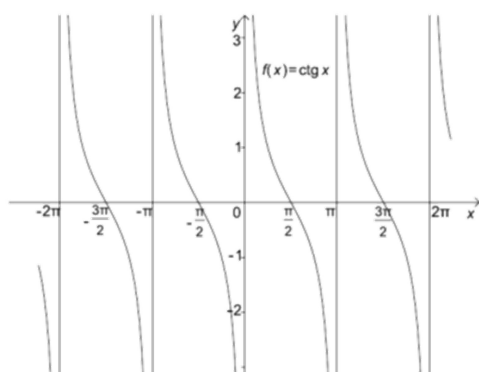
- $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} = 0$, $\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} 0$, $\operatorname{ctg} \pi$, $\operatorname{ctg} k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ nije definirano

Funkcija kotangens je neparna funkcija, tj. vrijedi $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

Funkcija kotangens je periodična funkcija s temeljnim periodom π , tj.

$$\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Graf funkcije kotangens:



- Skup vrijednosti funkcije kotangens je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$,

$$\mathcal{D}_{\text{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Skup vrijednosti funkcije kotangens je skup realnih brojeva, $Im_{\text{ctg}} = \mathbb{R}$.
- Nultočke su: $N_{\text{ctg}} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Zadatak. Koristeći svojstva funkcije tangens i kotangens popunite tablicu:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\operatorname{tg} t$									
$\operatorname{ctg} t$									

t	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\operatorname{tg} t$									
$\operatorname{ctg} t$									

Rješenje zadatka:

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

t	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

9.3 Zadaci

1. Odredite vrijednosti preostalih trigonometrijskih funkcija ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$):

i) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x < 0$

ii) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in III. \text{ kvadrantu}$

iii) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$

2. Riješite dane jednačbe:

(a) $\sin 3x = -1$

(b) $\cos^2\left(\frac{1}{2}x\right) = 1$

(c) $\sin 2x \cdot \cos 3x = 0$

3. Riješite jednađbe:

(a) $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

(b) $\cos 2x = \cos x$

(c) $2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$

(d) $\operatorname{tg} 3x \cdot \cos 2x = 0$

4. Riješite u intervalu $[0, 2\pi)$ sljedeće nejednadžbe:

(a) $\sin x > \sin 2x$

(b) $\cos 8x - \cos 4x \leq 0$

10 Transformacije nad grafovima funkcija

10.1 Horizontalna translacija

Neka je dana funkcija f i realni broj $c \in \mathbb{R}$. Ako za funkciju g vrijedi

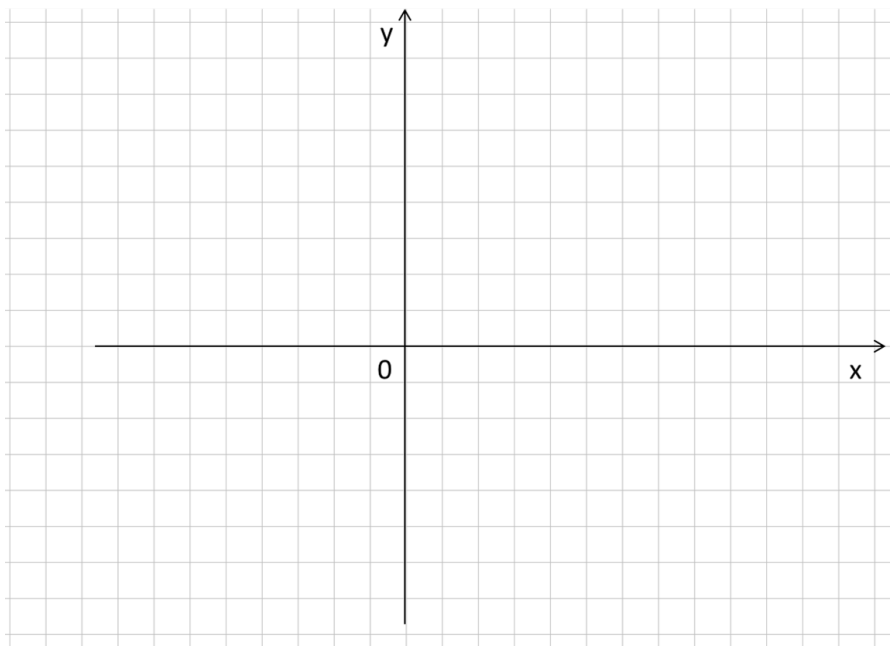
$$g(x) = f(x - c), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f),$$

tada graf funkcije g nastaje horizontalnom translacijom grafa funkcije f u desno ako je $c > 0$, odnosno u lijevo ako je $c < 0$.

Primjeri

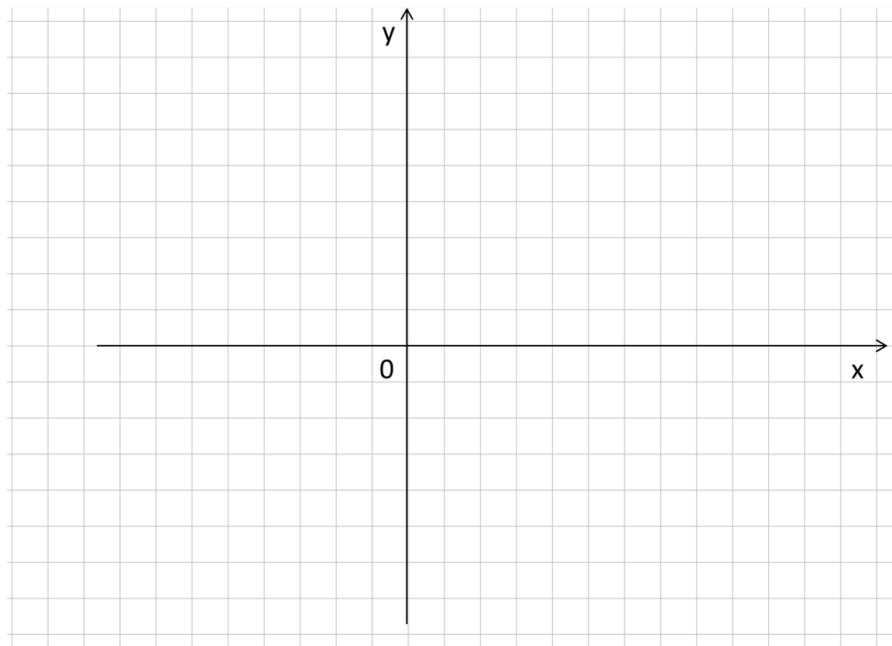
1. $f(x) = x^2, \quad g(x) = (x - 1)^2$

Tada je $g(x) = f(x - 1)$, odnosno $c = 1$, i riječ je o translaciji u desno za 1.



2. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Tada je $g(x) = f(x + \frac{\pi}{2})$, odnosno $c = -\frac{\pi}{2}$, i riječ je o translaciji u lijevo za $\frac{\pi}{2}$.



10.2 Vertikalna translacija

Neka je dana funkcija f i realni broj $k \in \mathbb{R}$. Ako za funkciju g vrijedi

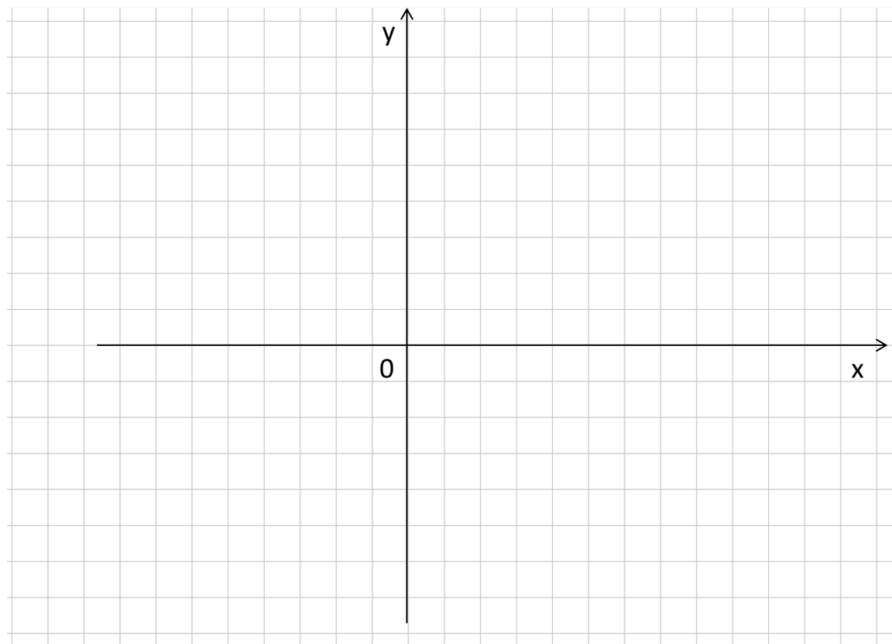
$$g(x) = f(x) + k, \quad \forall x \in \mathcal{D}(f),$$

tada graf funkcije g nastaje vertikalnom translacijom grafa funkcije f prema gore ako je $k > 0$, odnosno prema dolje ako je $k < 0$.

Primjeri

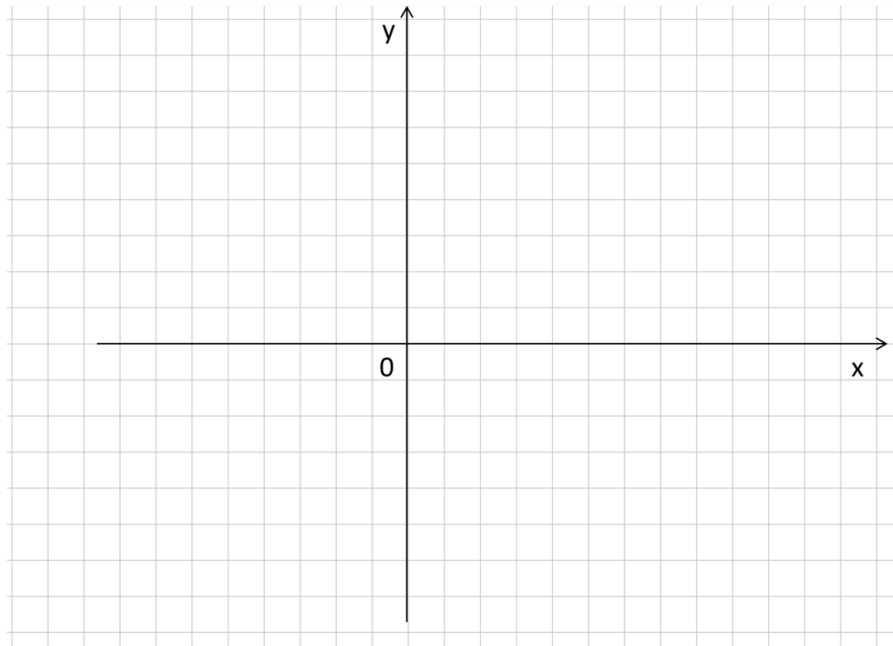
1. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 - 1$

Tada je $g(x) = f(x) - 1$, odnosno $k = -1$, i riječ je o translaciji prema dolje za 1.



2. $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin x + 1$

Tada je $g(x) = f(x) + 1$, odnosno $k = 1$, i riječ je o translaciji prema gore za 1.



10.3 Skaliranje u smjeru osi y

Neka je dana funkcija f i realni broj $A > 0$ te funkcija g za koju vrijedi

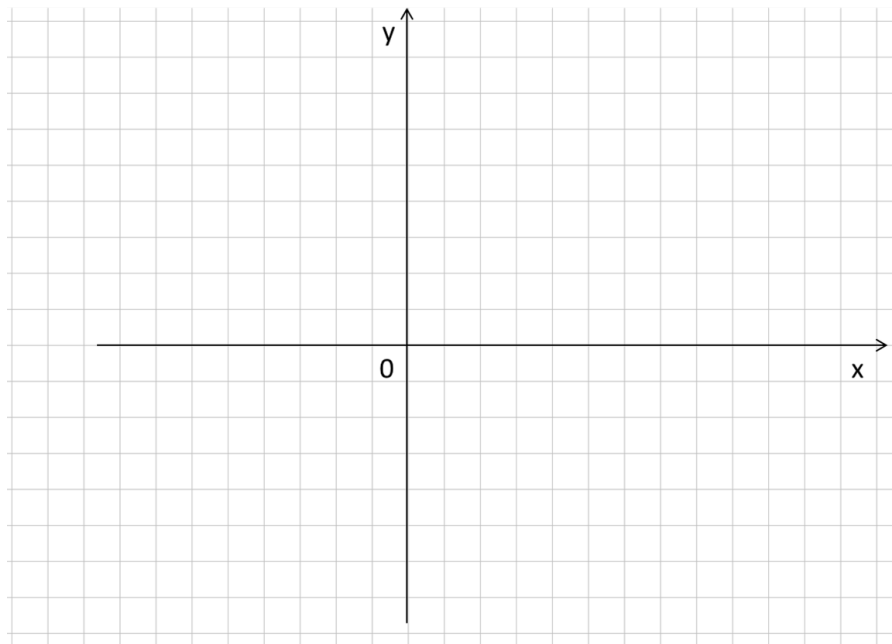
$$g(x) = A \cdot f(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

Amplituda grafa funkcije g se u odnosu na amplitudu grafa funkcije f povećala za faktor A ako je $A > 1$, odnosno smanjila za faktor A ako je $0 < A < 1$.

Primjeri

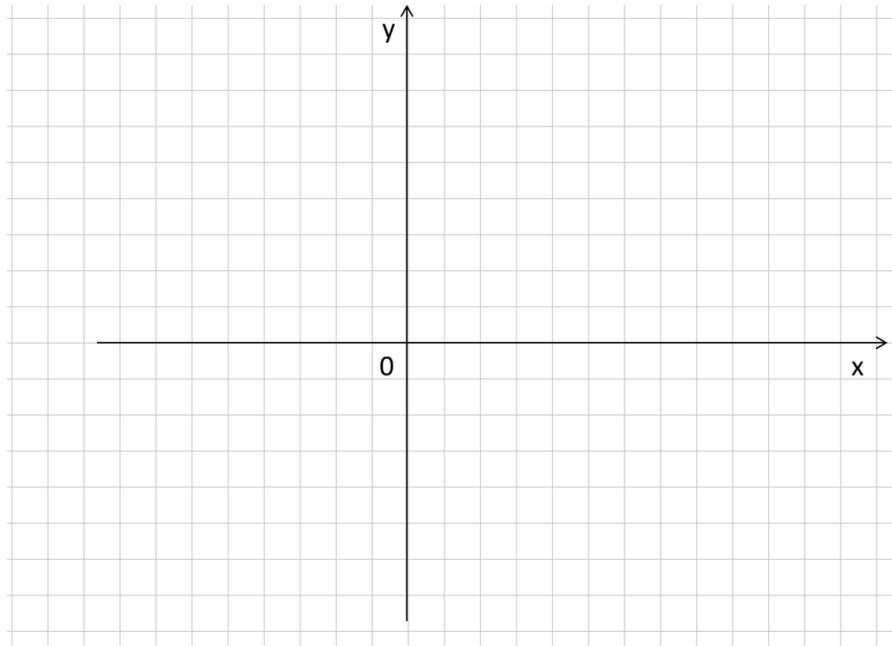
1. $f(x) = \sin x, \quad g(x) = 2 \sin x$

Tada je $g(x) = 2f(x)$, odnosno $A = 2$. Amplituda grafa funkcije g se povećala za faktor 2.



$$2. \quad f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{3} \sin x$$

Tada je $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$, odnosno $A = \frac{1}{3}$. Amplituda grafa funkcije g se smanjila za faktor $\frac{1}{3}$.



10.4 Skaliranje u smjeru osi x

Neka je dana funkcija f i realni broj $\lambda > 0$ i funkcija g za koju vrijedi

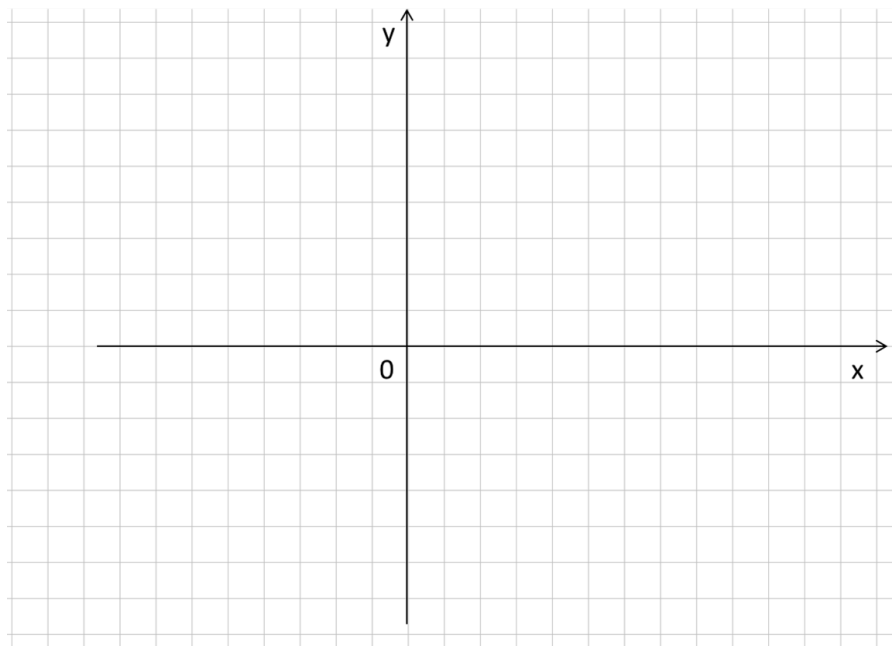
$$g(x) = f(\lambda \cdot x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f).$$

Graf funkcije g nastaje stezanjem (kontrakcijom) grafa funkcije f za faktor λ ako je $\lambda > 1$, odnosno rastezanjem (dilatacijom) grafa funkcije f za faktor λ ako je $0 < \lambda < 1$.

Primjeri

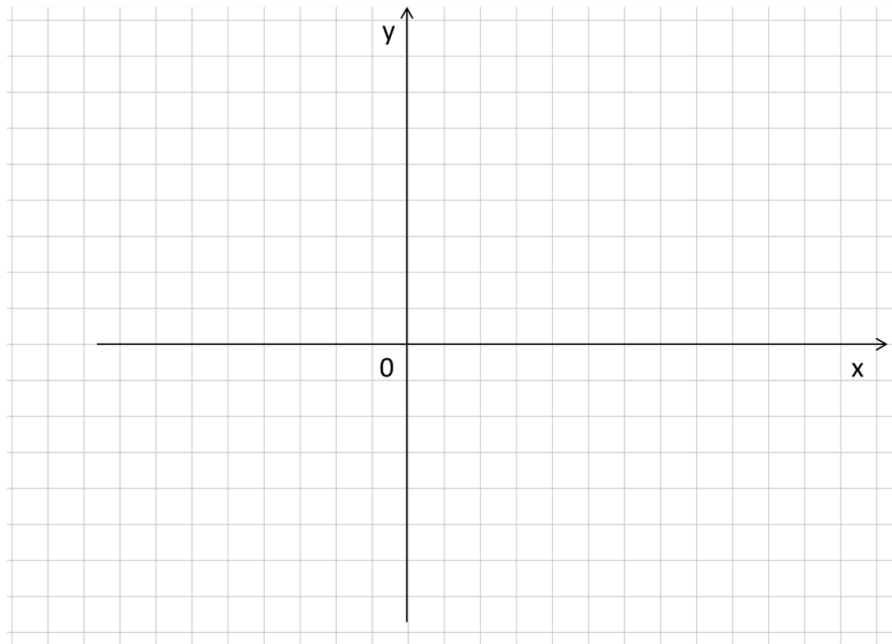
1. $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin 2x$

Tada je $g(x) = f(2x)$, odnosno $\lambda = 2$ i dolazi do stezanja grafa funkcije g .



2. $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

Tada je $g(x) = \frac{1}{3}f(x)$, odnosno $\lambda = \frac{1}{3}$ i dolazi do rastezanja grafa funkcije g .



10.5 Zrcaljenje obzirom na os x

Ako za funkcije f i g vrijedi

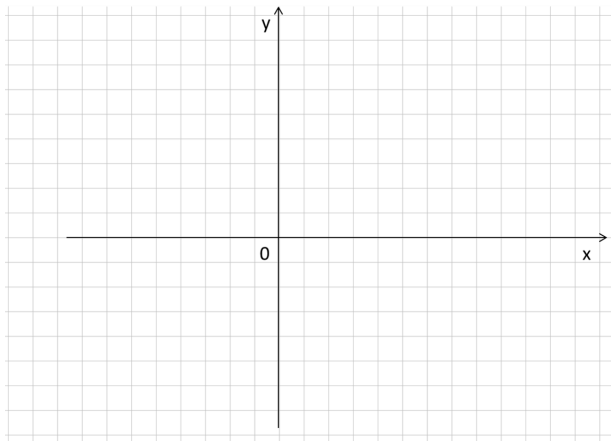
$$g(x) = -f(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f),$$

tada graf funkcije g nastaje zrcaljenjem grafa funkcije f obzirom na os x .

Primjeri

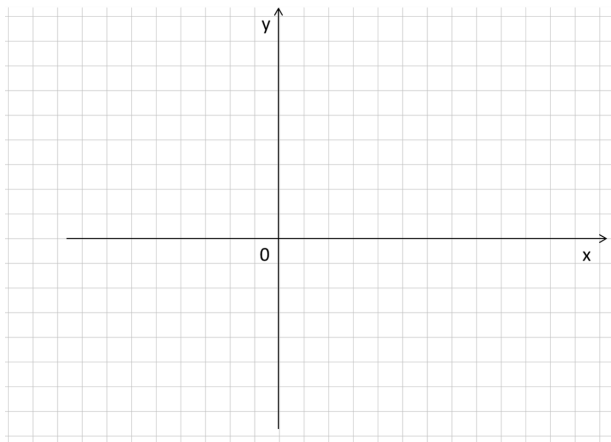
1. $f(x) = x^2, \quad g(x) = -x^2$

Tada je $g(x) = -f(x)$ i grafovi ovih funkcija su osnosimetrični obzirom na os x .



2. $f(x) = \ln x, \quad g(x) = -\ln x$

Tada je $g(x) = -f(x)$ i grafovi ovih funkcija su osnosimetrični obzirom na os x .



10.6 Zrcaljenje obzirom na os y

Ako za funkcije f i g vrijedi

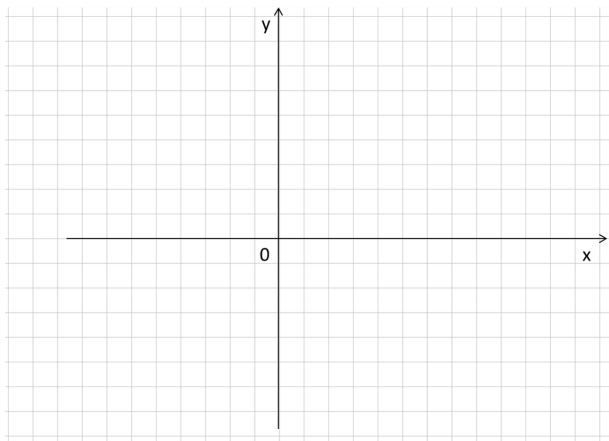
$$g(x) = f(-x), \quad \forall x \in \mathcal{D}(f),$$

tada graf funkcije g nastaje zrcaljenjem grafa funkcije f obzirom na os y .

Primjeri

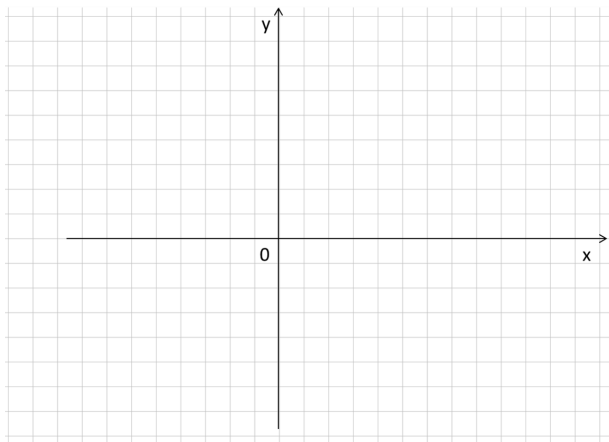
1. $f(x) = 2x + 1, \quad g(x) = -2x + 1$

Tada je $g(x) = f(-x)$ i grafovi ovih funkcija su osnosimetrični obzirom na os y .



2. $f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{-x}$

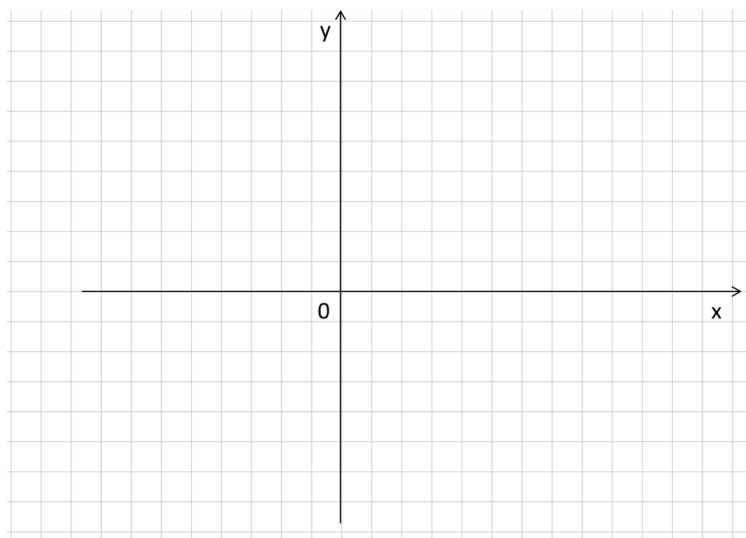
Tada je $g(x) = f(-x)$ i grafovi ovih funkcija su osnosimetrični obzirom na os y .



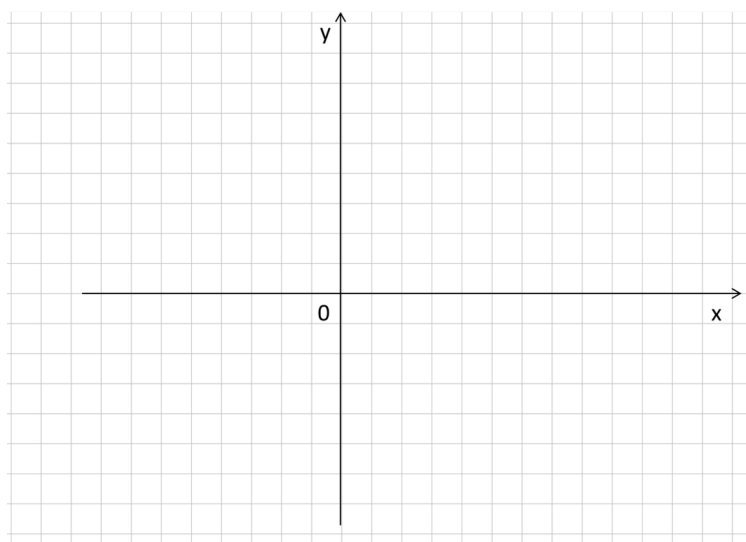
10.7 Zadaci

Nacrtajte grafove sljedećih funkcija:

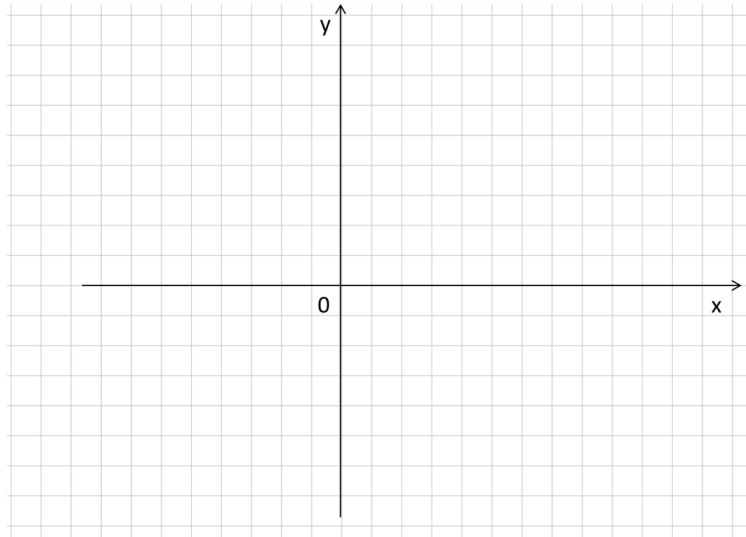
1. $f(x) = (x + 2)^2 + 1$



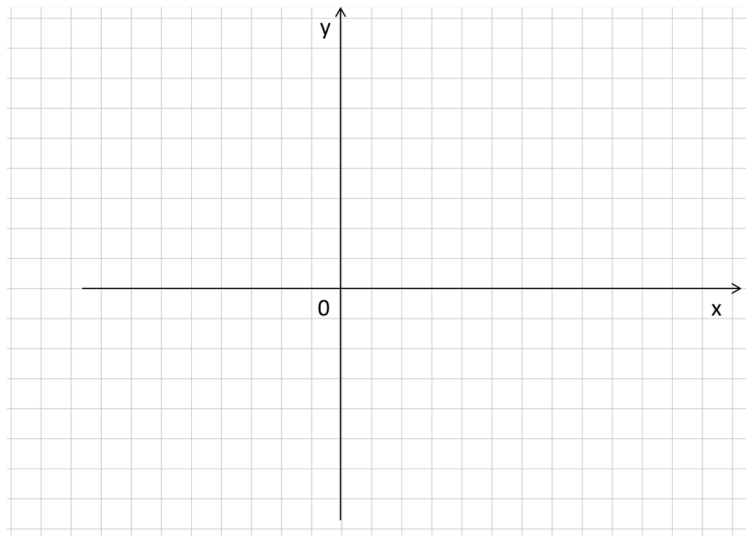
2. $f(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{2})$



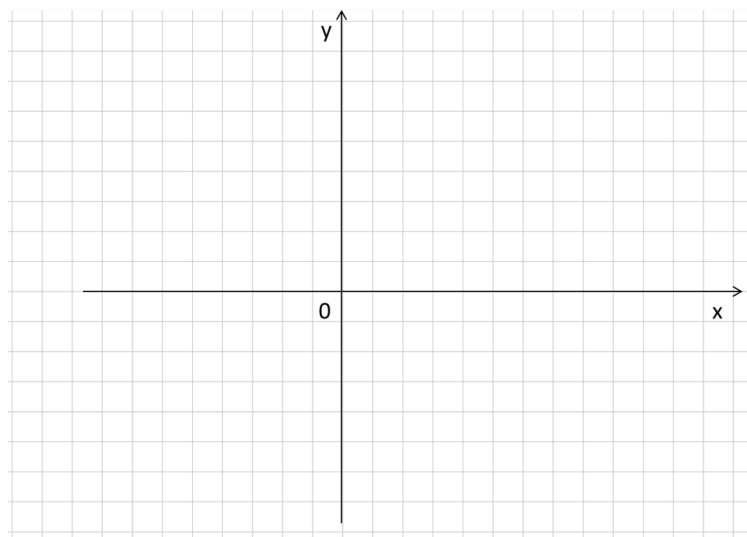
3. $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 1$



4. $f(x) = -e^{-x}$



5. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(1 - x)$



11 Apsolutna vrijednost realnog broja

Apsolutna vrijednost realnog broja x , u oznaci $|x|$, je broj

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Svojstva

- $|-x| = |x|$
- $x \leq |x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x - y| \leq |x| + |y|$
- $(|x| \leq a) \iff (-a \leq x \leq a)$
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$

11.1 Jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima

11.2 Zadatci

1. Riješite jednadžbu: $|2x - 4| = 3x - 1$.

2. Riješite jednadžbu: $|2x - 3| - |x + 1| = 5x - 10$.

3. Riješite nejednadžbu: $x + |x| \leq 1$.

4. Riješite nejednadžbu: $|4 - 2x| + 6x > 0$.

5. Riješite nejednadžbu: $|2x - 3| - |3x + 7| > 0$.

6. Riješite nejednadžbu: $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| \geq 2$.

12 Pravac

EksPLICITNI oblik jednadžbe pravca

$$y = kx + l$$

k - koeficijent smjera

l - odsječak na osi y

Implicitni oblik jednadžbe pravca

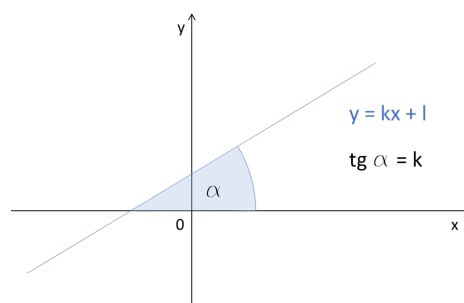
$$Ax + By + c = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

Segmentni oblik jednadžbe pravca

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

m - odsječak na osi x

n - odsječak na osi y



Uvjet paralelnosti dvaju pravaca

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1$$

$$p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$p_1 \parallel p_2 \iff k_1 = k_2$$

$$p_1 \dots A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$p_2 \dots A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$p_1 \parallel p_2 \iff A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$$

Uvjet okomitosti dvaju pravaca

$$p_1 \dots y = k_1x + l_1$$

$$p_2 \dots y = k_2x + l_2$$

$$p_1 \perp p_2 \iff k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$p_1 \dots A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$p_2 \dots A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$p_1 \perp p_2 \iff A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

Jednadžbe pravca koji ima koeficijenta smjera k i sadrži točku $T(x_0, y_0)$ glasi

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Jednadžbe pravca koji sadrži dvije točke $T_1(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$ glasi

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Udaljenost d točke $T(x_0, y_0)$ od pravca $Ax + By + C = 0$ dana je formulom

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

12.1 Zadaci

1. Nađite segmentni oblik jednadžbe pravca $2x - 7y - 14 = 0$.
2. Nađite jednadžbu pravca koji je paralelan s pravcem $3x - 4y + 15 = 0$ i koji sadrži točku $T(2, 5)$.

3. Zadana je familija pravaca $\lambda \cdot x - 3(1 - \lambda)y + 5\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Nađite onaj pravac te familije koji je okomit na pravac $2x - 3y + 11 = 0$.

4. Nađite jednadžbu pravca kojemu je odsječak na osi y jednak -3 i koji prolazi točkom $A(2, 5)$.

5. Nađite sjecište S pravaca p, q ako je dano

$$p \dots \quad x + y - 1 = 0$$

$$q \dots \quad 2x + 3y + 4 = 0.$$

6. Nađite jednadžbu pravca koji je okomit na pravac $y = 2x - 3$, a parabolu $y = x^2$ siječe u točki s apscisom $x = 2$.